

EJERCICIO DE CONJUNTOS

Situaciones Problema

Para la solución de estas situaciones problemas relacionadas con la teoría de conjuntos, es necesario tener en presente las siguientes propiedades sobre el cardinal que se escriben como un teorema y su corolario.

Teorema: Propiedades del Cardinal Sean A y B subconjuntos de U el cual es finito entonces

1. $\text{card}(\varphi) = 0$.
2. $\text{card}(A^c) = \text{card}(U) - \text{card}(A)$.
3. $\text{card}(A - B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$.
4. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Corolario: Sean A, B y C subconjuntos de U el cual es finito, entonces

1. Si $A \subseteq B$ entonces $\text{card}(B - A) = \text{card}(B) - \text{card}(A)$.
2. $\text{card}(A \Delta B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - 2\text{card}(A \cap B)$.
3. $\text{card}(A^c \cup B^c) = \text{card}(U) - \text{card}(A \cap B)$.
4. $\text{card}(A \cup B^c) = \text{card}(U) + \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B)$.
5. $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

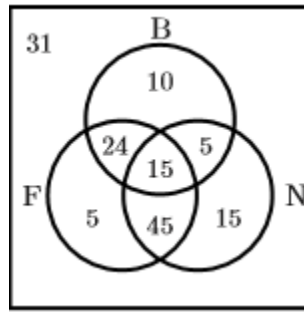
Ejemplo: En una encuesta realizada en la universidad a 150 estudiantes acerca de sus prácticas deportivas, se encontraron los siguientes datos:

- 54 estudiantes practican baloncesto. 10 estudiantes practican baloncesto solamente.
- 89 estudiantes practican fútbol. 20 estudiantes practican baloncesto y natación.
- 80 estudiantes practican natación. 15 estudiantes practican los tres deportes.
- 60 estudiantes practican fútbol y natación.

Calcule:

1. ¿Cuántos estudiantes practican baloncesto y fútbol pero no natación?
2. ¿Cuántos practican un solo deporte?
3. ¿Cuántos practican a lo sumo dos deportes?
4. ¿Cuántos practican como mínimo dos deportes?

Solución: Sean B, F y N los conjuntos que representan los estudiantes que practican baloncesto, fútbol y natación de forma respectiva, el cardinal del conjunto universal es de 150, se escribe $\text{card}(U) = 150$, mientras que la intersección de los tres conjuntos es 15, es por ello que $\text{card}(B \cap F \cap N) = 15$, como 20 estudiantes practican baloncesto y natación por ello que $\text{card}(B \cap F \cap N) = 15$, como 20 estudiantes practican baloncesto y natación pero no fútbol, se escribe como $\text{card}(B \cap F \cap N^c) = 5$. Continuando con un razonamiento similar se construye el siguiente diagrama de Venn



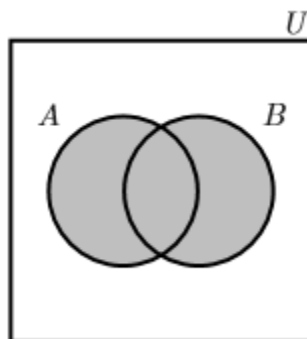
Con base en la representación gráfica se responden las preguntas planteadas. Para la primera, el conjunto a considerar es $B \cap F \cap N^c$, cuyo cardinal es $\text{card}(B \cap F \cap N^c) = 24$, por lo que 24 estudiantes practican baloncesto y fútbol pero no natación. Ahora bien, los que practican un solo deporte se representa en términos de las operaciones de conjuntos como $(B \Delta F) \Delta N$, donde $\text{card}((B \Delta F) \Delta N) = 30$, es decir, 30 estudiantes.

La expresión a lo sumo dos deportes indica aquellos estudiantes que practican dos deportes, un deporte y los que no practican ninguna actividad deportiva, es decir, sumar 74, 30 y 31, es por ello que 135 estudiantes practican a lo sumo dos deportes. Mientras que la palabra como mínimo dos deportes es que practican dos o más deportes, en este caso dos o tres deportes, para la primera situación 74 y para la segunda 15, un total de 89 estudiantes practican como mínimo dos deportes.

Operaciones entre conjuntos

Intuitivamente, una operación entre conjuntos es una regla tal que, al relacionar dos conjuntos de una forma determinada, el resultado es un tercer conjunto. Entre las operaciones usuales de conjuntos se encuentran la unión, la intersección, la diferencia y la diferencia simétrica. Tales operaciones se relacionan directamente con los operadores de la lógica proposicional, se representan gráficamente en un diagrama de Venn a partir de áreas sombreadas.

Considere un elemento x en la unión entre los conjuntos A y B , se escribe $x \in (A \cup B)$, siempre que x sea un elemento en la región sombreada que aparece a continuación



Asuma las proposiciones P : " $x \in A$ " y Q : " $x \in B$ ", con base en el gráfico relativo a la unión, un elemento x tiene cuatro posibilidades para ser ubicado

1. El elemento x está en A y en B por lo que las proposiciones P y Q son verdaderas. La proposición $x \in (A \cup B)$ es verdadera ya que el elemento se encuentra en la región sombreada.
2. El elemento x está en A pero no en B de allí que P es una proposición verdadera, pero Q falsa; mientras que la proposición $x \in (A \cup B)$ es verdadera.
3. El elemento x no está en A pero sí en B , para esta situación la proposición P es falsa y Q es verdadera, donde $x \in (A \cup B)$ es una proposición verdadera.
4. La última alternativa es que x no esté ni en A ni en B lo que produce que las proposiciones P y Q sean falsas; para esta situación la proposición $x \in (A \cup B)$ es falsa ya que x no está en la región sombreada.

En la siguiente tabla se resume esta situación.

Casos	$x \in (A \cup B)$	$P: "x \in A"$	Conector	$Q: "x \in B"$
1	V	V		V
2	V	V		F
3	V	F		V
4	F	F		F

Ejemplo: Sean $A = \{x: x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$, $B = \{x + 7 : x = -6, -7, -8, -9\}$ y $C = \{-3, -2, -1, 0\}$ conjuntos. Para determinar qué elementos conforman el conjunto A es necesario factorizar la expresión $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ como $x(x-1)(x-2) = 0$, de allí que los conjuntos A y B se escriben como $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{1, 0, -1, -2\}$.

Luego $A \cup B = \{0, 1, 2, -1, -2\}$, mientras que $B \cup A = \{1, 0, -1, -2, 2\}$, es decir, $A \cup B = B \cup A$, es decir, la propiedad conmutativa puede ser cierta. Además se presentan las inclusiones $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$. Al unir el conjunto C con sí mismo resulta $C \cup C = \{-3, -2, -1, 0\} = C$, por tanto la propiedad de idempotencia parece ser válida respecto de la unión. Como $A \cup B = \{0, 1, 2, -1, -2\}$ entonces $(A \cup B) \cup C = \{0, 1, 2, -1, -2, -3\}$. Por otro lado, $B \cup C = \{1, 0, -1, -2, -3\}$ y así $A \cup (B \cup C) = \{0, 1, 2, -1, -2, -3\}$, con esto se concluye que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, es decir, se verifica la propiedad asociativa.

Ejemplo: Para los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $C = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ se tiene $A \cap B = \{1, 2\}$ y $A \cap C = \{0, 1, 3\}$, la unión de estos conjuntos resultantes es $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 0, 3\}$ (1). Por otro lado, $B \cup C = \{-2, -1, 0, 1, 2, -3, 3\}$, se intersecta con el conjunto A para obtener $A \cap (B \cup C) = \{0, 1, 2, 3\}$ (2). Entre las igualdades (1) y (2) se sigue que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Esto representa la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión.